# Azionamenti a Motore Passo Passo

Sistemi Meccatronici 2003-04 – Università di Bergamo

## 1 Introduzione

Il motore passo passo, insieme al driver di potenza che lo pilota, costituisce un azionamento *a moto incrementale*: ad ogni impulso di comando che giunge al sistema, il motore compie una rotazione finita.

Volendone dare una rappresentazione grafica si ottiene il diagramma di figura 1 dove in ordinata è indicata la posizione angolare $\alpha$ del rotore e in ascissa il tempo $t$; $t_1$, $t_2$,..., $t_n$ rappresentano gli istanti in cui giungono gli impulsi di comando.

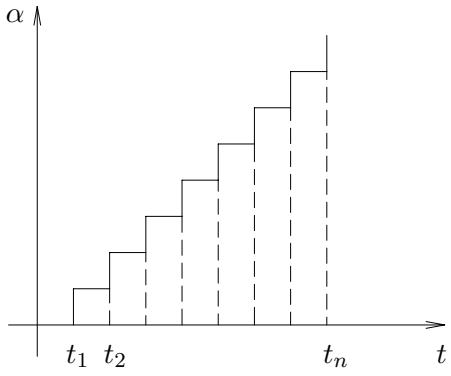



**Figura 1:** Avanzamento incrementale

Il moto che si ottiene da questo tipo di sistema è un moto controllato in posizione: noto il numero di impulsi inviati, risulta nota la posizione del rotore. La velocità viene stabilita in base alla frequenza con cui giungono gli impulsi di comando.

Proprio per questo carattere incrementale, una movimentazione di questo tipo è adatta per applicazioni in cui è richiesto un posizionamento a basso costo e prestazioni dinamiche modeste. Esempi di applicazioni sono:

- periferiche di sistemi digitali (stampanti, floppy, posizionatori testine hard disks);
- settore automotive (regolazione valvola a farfalla, regolazione altezza fari);
- piccole automazioni in genere fino a potenze di qualche centinaio di $Watt$.

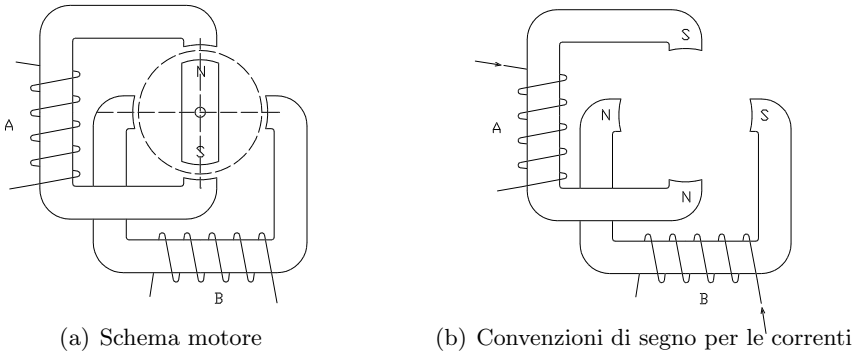
## 2 Principio di funzionamento

Per comprendere il funzionamento dei motori passo, si può considerare uno schema di principio molto semplificato di un motore passo a magneti permanenti (figura 2(a)). Sul rotore risiedono le coppie di poli magnetici, mentre sullo statore sono ricavate le espansioni polari attorno a cui sono avvolte le spire del circuito di alimentazione[1].

Il rotore e lo statore costituiscono un circuito magnetico; facendo circolare corrente negli avvolgimenti, le espansioni polari si magnetizzano e tendono ad attrarre verso di sè i poli di statore opposti.

[1] Il tipo di motore a cui si fa riferimento, caratterizzato ad una sola coppia di poli e da due coppie di espansioni polari, non ha applicazioni pratiche; è caratterizzato da pochi passi/giro e da una bassa efficienza.

La rotazione viene ottenuta alimentando le fasi secondo una determinata sequenza e con un determinato verso della corrente. Convenzionalmente si considerino positive le correnti, dette ${i_A}^+$ e ${i_B}^+$, che percorrono gli avvolgimenti come indicato in figura 2(b) (dove sono rappresentati solo i circuiti magnetici statorici)




(a) Schema motore (b) Convenzioni di segno per le correnti

**Figura 2:** Motore passo a magneti permanenti

Partendo dalla condizione iniziale in cui la fase $A$ è alimentata con corrente ${i_A}^+$, la sequenza di alimentazione ${i_B}^+$, ${i_A}^-$, ${i_B}^-$, ${i_A}^+$, produce la rotazione di un giro completo del motore, come indicato in figura 3.

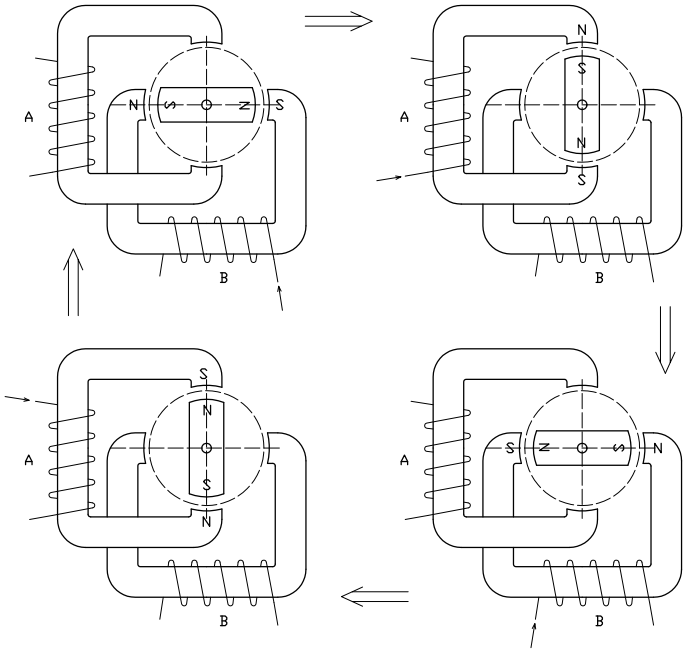



**Figura 3:** Sequenza di comando

In questo caso la rotazione del motore viene ottenuta alimentando in sequenza una sola fase per volta: si parla di alimentazione **one phase on**.

Il motore a magneti permanenti considerato è caratterizzato da quattro avanzamenti per ogni giro completo: questi avanzamenti vengono denominati **passi** e si dice quindi che il motore è da 4 passi/giro, con un **angolo di passo** $\alpha_p$ pari a 90°.

L'avanzamento del motore può essere ottenuto anche alimentando le due fasi contemporaneamente; in questo caso si parla di alimentazione **two phases on** (due fasi

contemporaneamente) e, con riferimento alla figura 4, la sequenza diventa $[{i_A}^+ - {i_B}^+]$, $[{i_A}^- - {i_B}^+]$, $[{i_A}^- - {i_B}^-]$, $[{i_A}^+ - {i_B}^-]$.

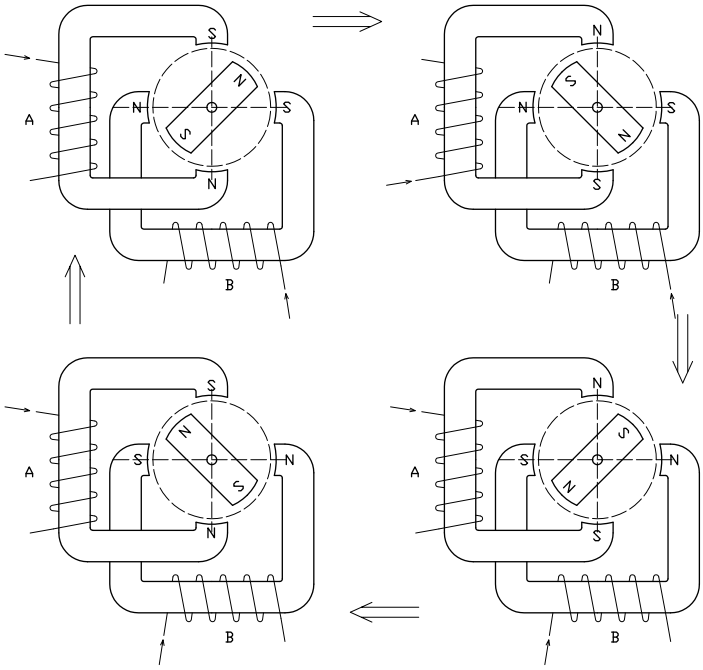



**Figura 4:** Sequenza di comando *two phases on*

In questo modo il rotore assume posizioni intermedie rispetto al caso precedente e, come si vedrà successivamente, si ha una sensibile incremento di coppia.

Entrambe le metodologie di alimentazione descritte generano un funzionamento **full step** (a passo intero), che si differenzia dal funzionamento ottenibile combinando le due metodologie di comando. È possibile, infatti, ottenere un tipo di funzionamento in cui il motore subisce avanzamenti angolari intermedi rispetto a quelli relativi alle alimentazioni *one phase on* e *two phases on*. Questo tipo di funzionamento è il cosiddetto funzionamento **half step** (*a mezzo passo*) (figura 5). In questo caso la sequenza di alimentazione delle fasi diventa: $[{i_A}^+ - {i_B}^+]$, ${i_B}^+$, $[{i_A}^- - {i_B}^+]$, ${i_A}^-$, $[{i_A}^- - {i_B}^-]$, ${i_B}^-$, $[{i_A}^+ - {i_B}^-]$, ${i_A}^+$.

Qualunque sia la metodologia di comando e il tipo di funzionamento utilizzato, la rotazione del motore in verso opposto a quello finora considerato viene ottenuta invertendo la sequenza di commutazione delle fasi. Nel caso di alimentazione *one phase on*, ad esempio, mentre la sequenza ${i_B}^+$, ${i_A}^-$, ${i_B}^-$, ${i_A}^+$ produce una rotazione completa oraria, la sequenza ${i_B}^-$, ${i_A}^-$, ${i_B}^+$, ${i_A}^+$ ne produce una ancora completa ma antioraria.

In questa rappresentazione schematica del funzionamento di un motore passo è facile intuire che la risoluzione del motore (cioè il numero di passi al giro) può essere aumentata aumentando il numero di coppie polari rotoriche.

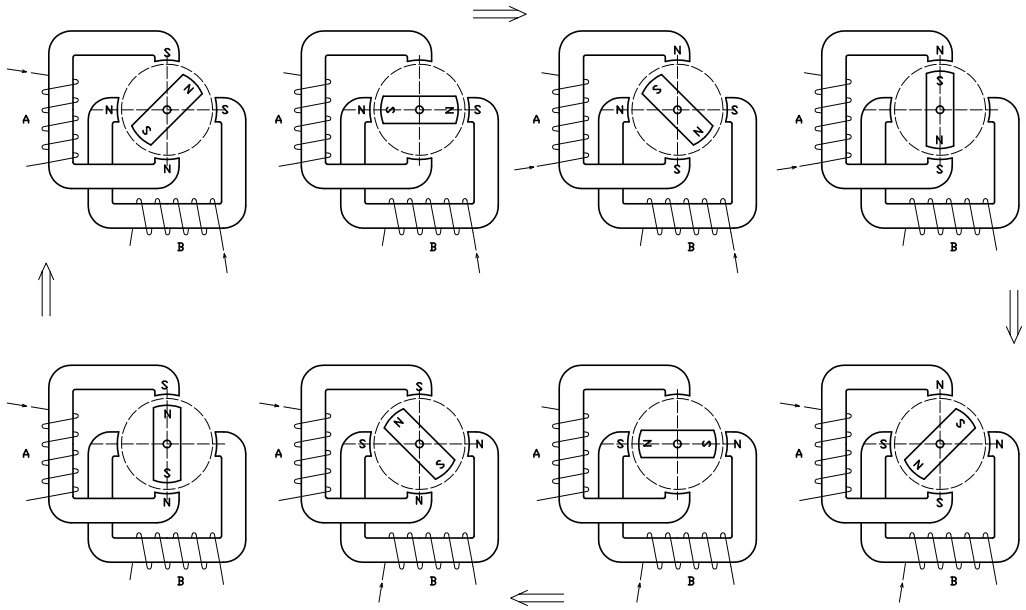



**Figura 5:** Funzionamento *half step*

# 3 Tipologie di motori passo

I motori passo esistono in diverse configurazioni:

- a **magneti permanenti** (PM - Permanent Magnet)
- a **riluttanza variabile** (VR - Variable Reluctance)
- **ibridi** (HY - Hybrid)

Dalle diverse tipologie elencate si intuisce che il principio di funzionamento si basa sui fenomeni di attrazione e repulsione fra poli magnetici e sul principio di minimizzazione della riluttanza di un circuito magnetico (come descritto in appendice).

## 3.1 Motore passo a magneti permanenti (PM)

Il principio di funzionamento di un motore passo a magneti permanenti si basa sul fenomeno di attrazione di poli magnetici opposti, come ampiamente descritto a proposito dello schema semplificato preso in considerazione.

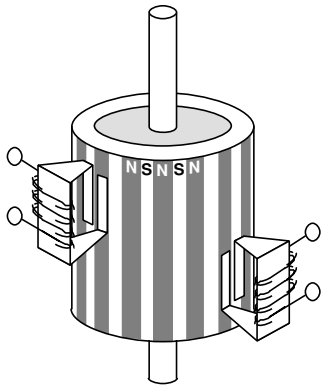



**Figura 6:** Motore passo PM

Nella realtà, però, sul rotore sono presenti più di una coppia polare e le due fasi statoriche sono disposte come in figura 6; il verso di percorrenza della corrente determina la polarizzazione delle due espansioni polari di ogni fase.

In figura 7 è rappresentata una sequenza di alimentazione delle fasi, per un motore con 6 coppie polari rotoriche, che provoca una rotazione in senso antiorario. Le due fasi sono distanziate di un angolo pari a due volte il passo polare[2] di rotore $\alpha_r$ meno 1/4 del passo stesso. In questo modo, come mostrato in figura, ad ogni commutazione il rotore ruota di un angolo $\alpha_p$ pari a $\alpha_r/4$. Nel caso specifico, in cui il rotore è formato da 6 coppie polari $p_r$, si ha $\alpha_r = 360°/6 = 60°$ e $\alpha_p = \alpha_r/4 = 15°$; in definitiva si può affermare che un motore dotato di $p_r$ coppie polari sarà caratterizzato da:

$$\text{angolo di passo } \alpha_p = \frac{360°}{4\,p_r}$$

$$\text{numero di passi al giro } n_p = \frac{360°}{\alpha_p}.$$

Nella realtà lo statore è suddiviso in due sezioni, una per ogni fase, ognuna delle quali ha un numero di coppie polari pari a quelle di rotore (figura 8); il numero di espansioni polari statoriche influenza solo la coppia erogabile dal motore e non la sua risoluzione (cioè il numero di passi/giro $n_p$).

I motori a magneti permanenti sono utilizzati in applicazioni di basso costo in cui le prestazioni richieste, in termini di velocità e coppia, non sono elevate (un esempio tipico sono i drives per floppy disk e le testine delle stampanti ad aghi). Una caratteristica tipica, dovuta alla presenza dei magneti permanenti, è che, anche con le fasi disalimentate, il motore è in grado di fornire una coppia, detta **coppia residua** (**Detent**

[2]Si ricordi che con *passo polare* si intende la distanza tra due poli omologhi.

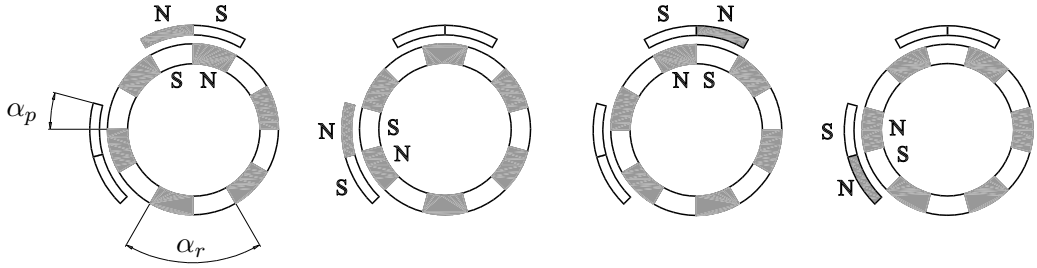
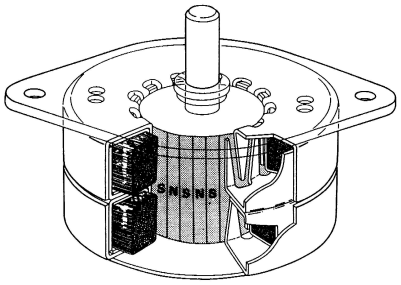
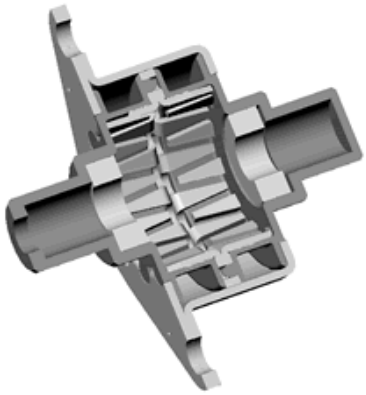


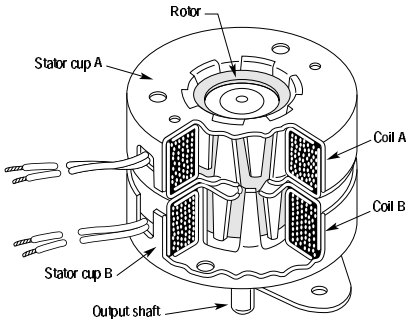

**Figura 7:** Sequenza di pilotaggio



(a) accoppiamento statore–rotore



(b) espansioni polari di statore




(c) disposizione delle due fasi

**Figura 8:** Motori passo PM

**Torque**); il rotore quindi tende a mantenere la propria posizione, anche in assenza di alimentazione. Il campo di angoli di passo va da 3.6° a 18° con risoluzioni che vanno quindi da 20 a 100 passi/giro (con pilotaggio a passo intero); i più tipici sono quelli dotati di 6 o 12 coppie polari a cui corrispondono rispettivamente angoli di passo di 15° e 7.5°, e risoluzioni di 24 e 48 passi/giro.

## 3.2 Motore passo a riluttanza variabile (VR)

I motori passo a riluttanza variabile sono composti da un rotore dentato di materiale ferromagnetico che ruota all'interno di uno statore che ospita gli avvolgimenti di 3 o 4 fasi.

In figura 9 è rappresentato un motore caratterizzato da $n_r = 6$ denti di rotore e $n_s = 8$ espansioni polari statoriche su cui sono alloggiate 4 fasi.

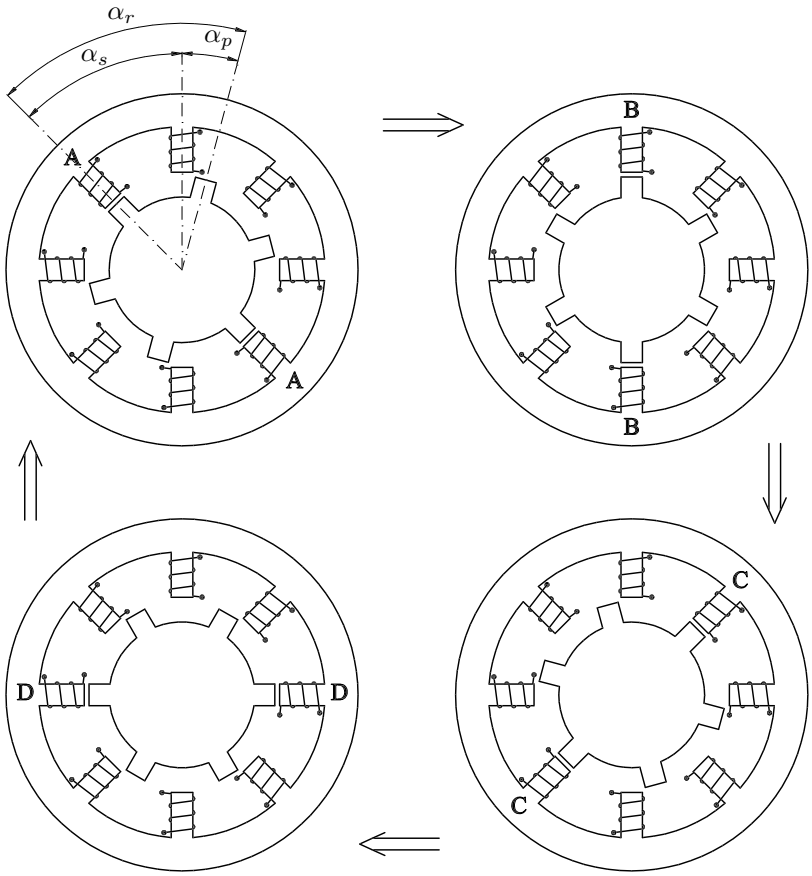



**Figura 9:** Sequenza di pilotaggio motore VR

In questa configurazione il passo dei denti di rotore e quello dei denti di statore sono sfasati di:

$$\alpha_p = \frac{360^\circ}{n_r} - \frac{360^\circ}{n_s} = 360^\circ \left(\frac{1}{n_r} - \frac{1}{n_s}\right) = 15^\circ$$

cioè di 1/4 del passo della dentatura di rotore.

Alimentando le fasi nella sequenza $A$, $B$, $C$, $D$, si ottiene, ad ogni commutazione, l'allineamento delle espansioni statoriche corrispondenti alla fase alimentata con i denti di rotore più vicini; si ottiene quindi una rotazione in senso antiorario di un passo pari ad $\alpha_p$[3]. Il motore presenta una risoluzione di:

$$n_p = \frac{360^\circ}{\alpha_p} = \frac{n_r\, n_s}{n_s - n_r} = 24 \text{ passi/giro}$$

[3]È interessante notare che, non essendoci la presenza di magneti permanenti, l'allineamento dei denti statorici e rotorici non è influenzato dalla direzione del flusso del campo magnetico generato dall'alimentazione delle fasi.

Variando il numero di espansioni polari statoriche e il numero di denti di rotore (mantenendo lo stesso rapporto tra i due), si ottengono anche angoli di passo più piccoli, fino a coprire l'intera gamma che va da 1.8° a 15°. Ad esempio raddoppiando sia il

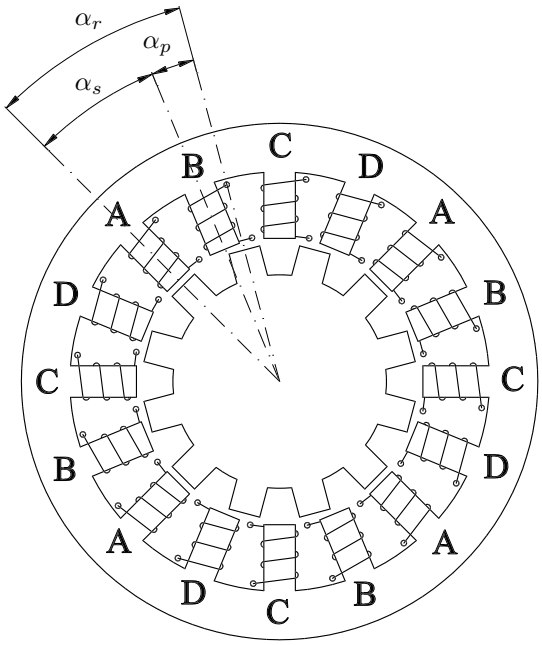



**Figura 10:** Motore passo VR con risoluzione di 48 passi/giro

numero di denti di rotore che il numero di espansioni statoriche si dimezza l'angolo di passo, raddoppiando di conseguenza la risoluzione (figura 10).

A causa delle scarse prestazioni in termini di coppia e di rendimento, il motore passo a riluttanza variabile è impiegato raramente; inoltre l'assenza di magneti permanenti fa si che il motore non sia dotato di coppia di mantenimento perciò, in caso di mancanza di tensione, il rotore non è in grado di mantenere in posizione l'eventuale carico.

### 3.3 Motore passo ibrido (HY)

I motori passo più diffusi combinano i principi della riluttanza variabile e dei magneti permanenti dando origine alla tipologia cosiddetta *ibrida*. Il rotore presenta un magnete permanente magnetizzato in senso assiale, cioè parallelamente all'asse di rotazione. Alle estremità del magnete sono calzati due cappelli dentati uguali, uno con polarizzazione N e l'altro con polarizzazione S. I due cappelli presentano dentature sfasate reciprocamente di mezzo passo angolare $\alpha_r$ della dentatura stessa (figura 11).

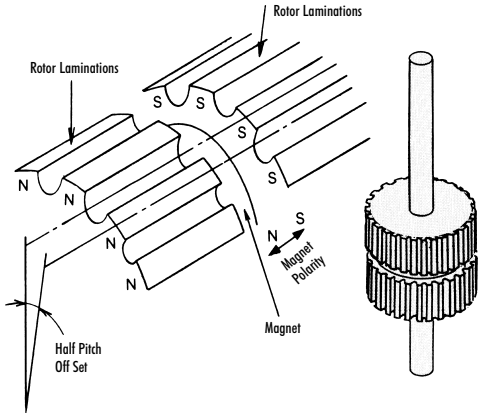



**Figura 11:** Sfasamento tra le due dentature di rotore

Lo statore è anch'esso dentato ma con passo $\alpha_s$ tale che $\alpha_s - \alpha_r = (1/4)\alpha_r$. In figura 12 è rappresentato lo schema di un motore passo ibrido caratterizzato da $n_r = 10$ denti di rotore e $n_s = 8$ denti di statore. Lo statore ospita gli avvolgimenti delle fasi A e B che sono disposte in modo da generare le polarità indicate. Osservando questo schema si nota che, alimentando la fase A con corrente ${i_A}^+$ (cioè assumendo positivo il verso di percorrenza di figura), le due coppie polari interessate da questa fase, si polarizzano in maniera opposta. L'insieme dei fenomeni di minimizzazione della riluttanza del circuito magnetico e della tendenza all'allineamento dei campi magnetici di statore e rotore provocano la generazione di una coppia sul rotore che tende ad allineare ad un'estremità il cappello N con i denti S e il cappello S con i denti N all'altra estremità. Alimentando ora la fase B con corrente ${i_B}^+$ (e disalimentando la fase A), il rotore ruota in senso orario di un angolo di passo $\alpha_p$:

$$\alpha_p = \alpha_s - \alpha_r = \frac{360^\circ}{n_s} - \frac{360^\circ}{n_r} = 360\left(\frac{1}{n_s} - \frac{1}{n_r}\right) = 9^\circ$$

pari a 1/4 dell'angolo di passo del rotore $\alpha_r$.

Imponendo la sequenza ${i_A}^+$, ${i_B}^+$, ${i_A}^-$, ${i_B}^-$, ${i_A}^+$, si provoca una rotazione oraria di 4 passi angolari; la sequenza inversa produce invece una uguale rotazione ma in verso antiorario. Il motore in questione ha quindi una risoluzione di:

$$n_p = \frac{360^\circ}{\alpha_p} = \frac{360^\circ\, 4}{\alpha_r} = n_r\, 4 = 40 \text{ passi/giro}$$

Aumentando il numero di denti sia del rotore che dello statore nella stessa proporzione, l'angolo di passo rimane sempre pari a 1/4 del passo angolare della dentatura rotorica $\alpha_r$. In questo modo, però, si ottiene un aumento della risoluzione del motore e quindi una diminuzione dell'angolo di passo $\alpha_p$.

Ad esempio con un rotore dotato di 50 denti (figura 13), che corrisponde ai motori più tipici presenti sul mercato, si ottiene un numero di passi al giro $n_p = 4\, n_r = 200$, da cui si ottiene immediatamente il valore dell'angolo di passo $\alpha_p = 360^\circ/200 = 1.8^\circ$.

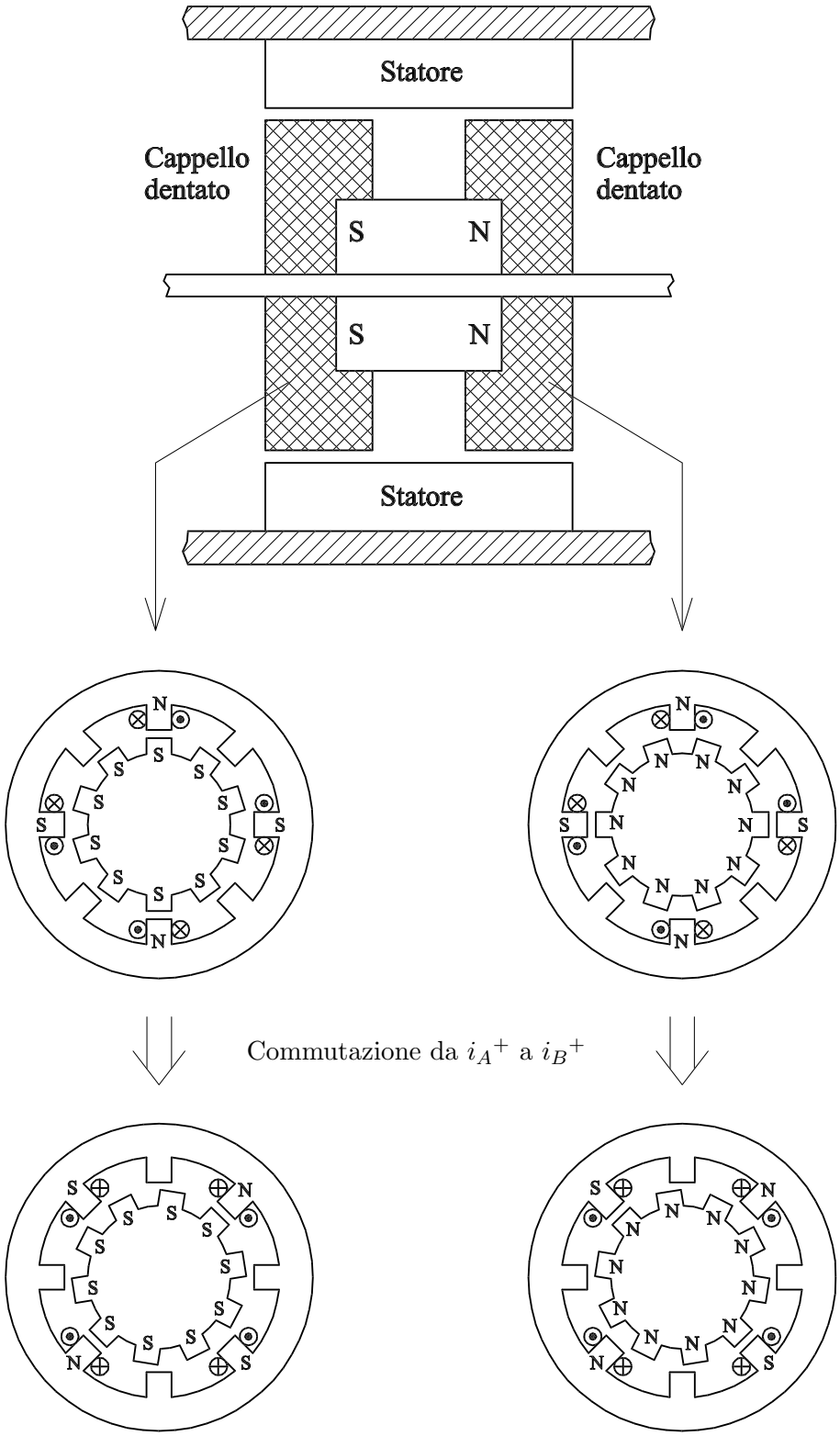



**Figura 12:** Schema di principio di un motore passo ibrido



**Figura 13:** Motore passo ibrido

Quando la risoluzione del motore è piuttosto alta, e quindi anche il numero di denti è elevato, le espansioni polari statoriche vengono dotate di dentatura; in particolare nel caso del motore caratterizzato da 50 denti, come si può osservare in figura 13, si hanno 8 espansioni polari di statore ognuna dotata di 5 denti.

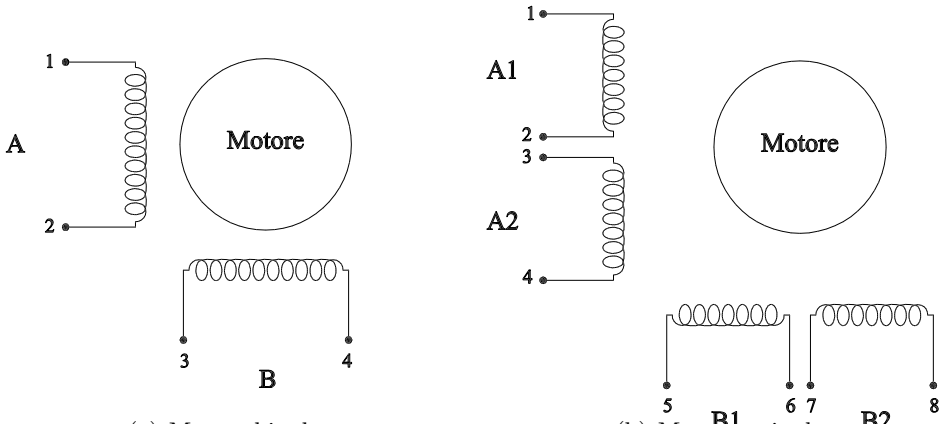
### 3.3.1 Fasi e avvolgimenti

Come già accennato in precedenza, il funzionamento del motore passo avviene grazie all'inversione del campo magnetico generato dalle fasi di statore. Nello schema di figura 12 si suppone che questa inversione venga realizzata agendo sul senso di circolazione della corrente negli avvolgimenti costituenti una singola fase: in questo caso si parla di motori **bipolari**. L'inversione del senso di circolazione della corrente viene realizzato dall'azionamento di pilotaggio detto anch'esso **bipolare**.

L'inversione del campo magnetico, però, può essere realizzata anche agendo sul verso di avvolgimento delle fasi piuttosto che sul verso di circolazione della corrente. In questo caso vengono utilizzati quattro avvolgimenti, due per ognuna delle precedenti fasi A e B; sulle espansioni polari interessate ad esempio dalla fase A vengono avvolte in versi opposti l'una rispetto all'altra le fasi A1 e A2. L'inversione della polarizzazione delle espansioni polari statoriche interessate dalla fase A viene quindi realizzata passando dall'alimentazione della fase A1 all'alimentazione della fase A2 e non più invertendo il senso di percorrenza della corrente. Le stesse considerazioni valgono naturalmente per la fase B. La sequenza di eccitazione, che genera l'avanzamento del rotore di un passo, diventa quindi $i_{A1}$, $i_{B1}$, $i_{A2}$, $i_{B2}$, $i_{A1}$, dove i segni $^+$ e $^-$ non compaiono più poiché la corrente circola nello stesso verso in tutte le fasi: si parla di motori e azionamenti **unipolari**.

In figura 14 sono rappresentate schematicamente le due situazioni sopra descritte (il differente verso di avvolgimento delle spire evidenzia la diversa polarizzazione del campo magnetico generato). Come si può notare dalla figura; è possibile capire se un motore è bipolare o unipolare semplicemente contando il numero di fili uscenti: un motore bipolare ha 4 fili mentre uno unipolare ne ha 8.

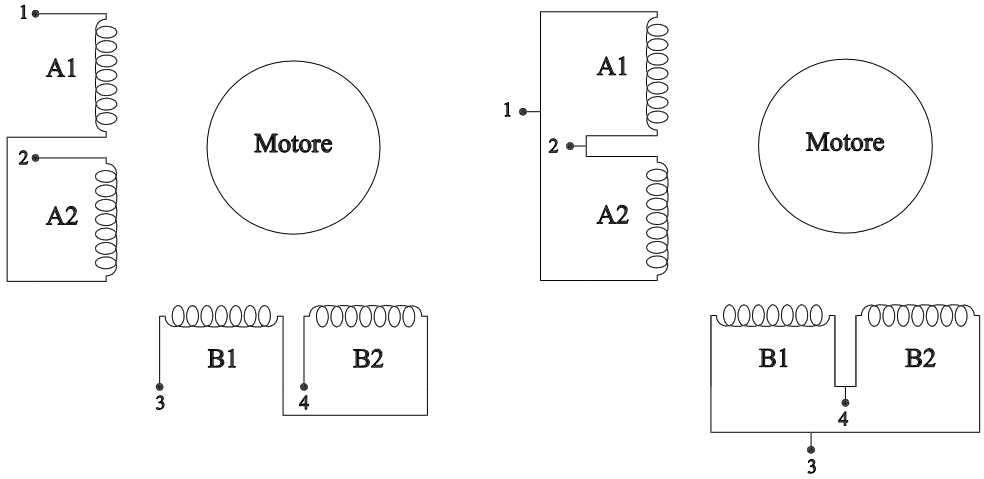
È da notare però che un motore unipolare può essere pilotato anche da un azionamento bipolare; questa condizione può essere realizzata collegando i due avvolgimenti di ogni fase in serie o in parallelo (figura 15) in maniera tale che generino due campi magnetici concordi. In questo modo viene ripristinata una configurazione equivalente alla bipolare; la scelta del tipo di collegamento va fatta tenendo conto che, a parità di




(a) Motore bipolare (b) Motore unipolare

**Figura 14:** Rappresentazione schematica degli avvolgimenti

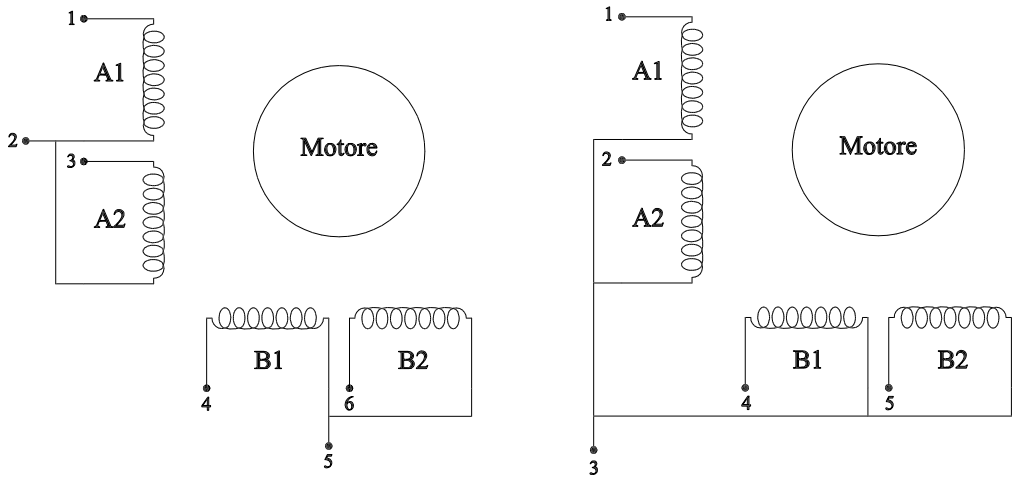
tensione applicata, la corrente circolante è differente nei due casi e quindi differente è anche la coppia erogabile dal motore.




(a) Collegamento in serie (b) Collegamento in parallelo

**Figura 15:** Collegamenti degli avvolgimenti di un motore unipolare

Sul mercato esistono anche motori che presentano all'esterno 5 o 6 fili; questi sono motori unipolari in cui i collegamenti fra le quattro fasi sono realizzati internamente secondo le modalità indicate in figura 16.




(a) 6 terminali esterni (b) 5 terminali esterni

**Figura 16:** Collegamenti interni delle fasi in un motore unipolare

# 4 Comportamento meccanico

## 4.1 La caratteristica statica

Per la definizione del comportamento di un azionamento a motore passo assume particolare rilievo la caratteristica statica.

Si consideri il motore con le due fasi alimentate con corrente pari alla corrente nominale; il campo magnetico di statore assume una posizione ben determinata e conseguentemente il rotore si porta in una posizione $\alpha_0$ caratterizzata, per l'equilibrio alla rotazione del rotore stesso, da una coppia motrice $C_m$ nulla.

Applicando dall'esterno in maniera quasi statica una piccola coppia resistente $C_r$, il rotore si porta in una nuova posizione di equilibrio $\alpha_m$, in cui la coppia motrice esercitata non sarà più nulla ma pari a $C_r$. Immaginando di ripetere il procedimento per diversi valori di $C_r$ e rappresentando graficamente il legame tra la coppia motrice $C_m$ e la posizione angolare del rotore $\alpha_m$, si ottiene il diagramma di figura 17.

Per valori di $C_r$ sufficientemente piccoli, rimuovendo la coppia resistente, il motore ritorna nella posizione $\alpha_0$. Al crescere di $C_r$ la pendenza della curva diminuisce sempre più in modulo, finché si raggiunge un valore massimo $C_H$; questo valore è noto con il nome di **holding torque** (**coppia di mantenimento**). Se viene superato questo valore di coppia, il motore perde il passo.

Tracciando l'andamento della caratteristica statica sull'angolo giro si ottiene una curva che, con buona approssimazione, può essere rappresentata con una sinusoide di periodo pari a quattro volte l'angolo di passo $\alpha_p$:

$$C_m = C_H \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_0 - \alpha_m)\right] \tag{1}$$

La presenza di un magnete permanente consente al rotore di assumere una posizione di equilibrio stabile anche con motore non alimentato. Applicando una modesta coppia di carico, il rotore assume una differente posizione di equilibrio, alla rimozione della quale ritorna nella posizione originaria. Se però la coppia di carico supera un certo valore detto **detent torque** (**coppia residua**), il motore perde il passo.

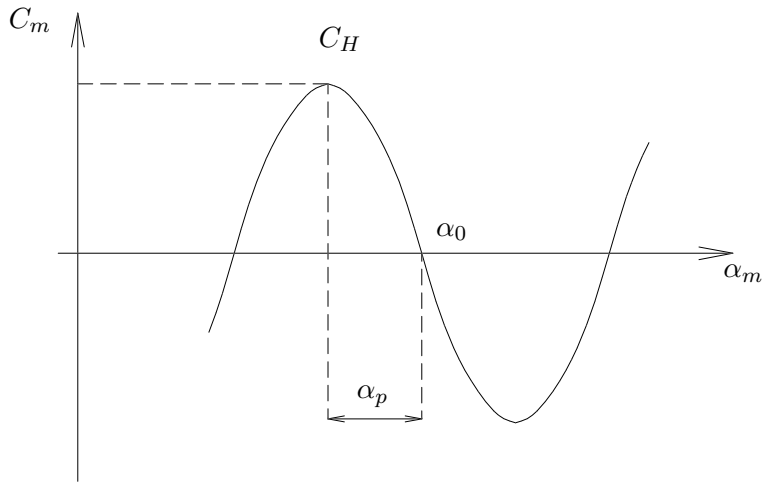



**Figura 17:** Caratteristica statica di un motore passo

## 4.2 La curva di pull-out

Pilotando un sistema azionamento (driver)–motore passo a frequenza di commutazione delle fasi costante $f$, si ottiene un funzionamento del motore a regime ad una velocità fissa corrispondente alla frequenza $f$ di pilotaggio; la curva caratteristica di un motore passo è dunque una retta verticale.

Quest'ultima risulta però limitata superiormente da un valore di coppia pari alla massima coppia resistente che il motore può vincere in condizioni di regime. Tale coppia prende il nome di **coppia di pull-out**.

Il valore della coppia di pull-out dipende dalla frequenza $f$ di comando; la curva che rappresenta l'andamento di questa coppia in funzione di $f$ è detta **curva di pull-out** (figura 18) e definisce il campo di funzionamento del sistema driver-motore passo (in specifiche condizioni di alimentazione) nel $I^\circ$ quadrante.

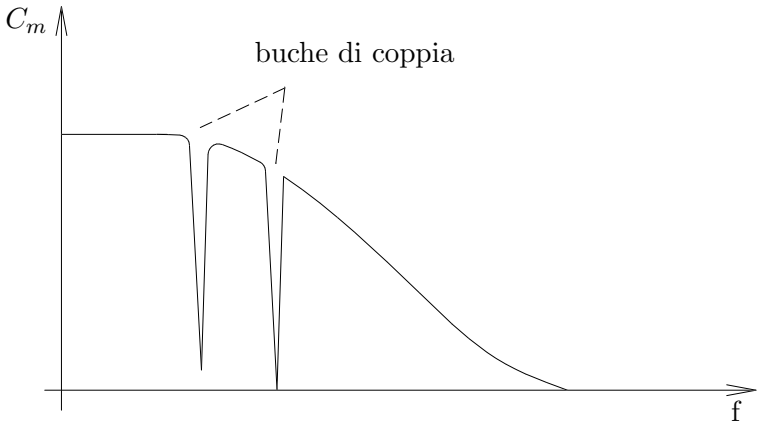



**Figura 18:** Curva di pull-out

La curva di pull-out è in genere fornita per frequenze superiori alla frequenza propria corrispondente alla sola inerzia del motore. Il fenomeno di risonanza si manifesta con la presenza di "buche" di coppia, come verrà spiegato nel paragrafo 4.3.

Per frequenze di comando sufficientemente basse la coppia di pull-out assume un valore pari a circa la holding torque, mentre per frequenze maggiori decresce progressivamente fino ad annullarsi.

Questa tendenza è da attribuirsi fondamentalmente ai transitori elettrici durante la commutazione dell'alimentazione delle varie fasi e alla presenza di una forza controelettromotrice (proporzionale alla velocità di rotazione del motore).

L'andamento della corrente in un avvolgimento caratterizzato da una resistenza $R$ e da un'induttanza $L$, nella fase di alimentazione ad una tensione $V$, è descritta dall'equazione differenziale:

$$V - Ri - L\frac{di}{dt} - V_{cem} = 0$$

dove con $V_{cem}$ si è indicata la forza controelettromotrice.

L'andamento della corrente è quindi caratterizzato da una costante di tempo elettrica $\tau = L/R$ e da un valore di regime pari a $i_R = (V - V_{cem})/R$.

All'aumentare della velocità di rotazione del motore, la forza controelettromotrice $V_{cem}$ aumenta e quindi la corrente di regime $i_R$ (e quindi la coppia erogabile dal motore) diminuisce.

Accanto a questo fenomeno vi è poi da aggiungere il fatto che, all'aumentare della frequenza di commutazione, diminuisce il tempo di permanenza a regime della corrente, fino ad arrivare alla condizione in cui la corrente non riesce a raggiungere il valore di regime e la coppia erogabile diventa sempre più bassa.

Questi comportamenti sono mostrati in figura 19 in cui sono rappresentati gli andamenti delle correnti di una fase per tre diverse frequenze di commutazione $f$ nel caso di un motore caratterizzato dai seguenti parametri:

| | |
|---|---|
| **Tipo** | bipolare |
| **Risoluzione** | 200 passi/giro |
| **Funzionamento** | passo intero |
| **Tensione di alimentazione fase** | 7.5 V |
| **Corrente nominale** | 0.2 A |
| **Resistenza di fase** | 37.5 Ohm |
| **Induttanza di fase** | 52 mH |
| **Costante di tempo elettrica $\tau$** | 1.4 ms |
| **Forza controelettromotrice** | 0.047 V/rpm |

Come si può notare dalla tabella, per i motori passo viene definito anche un parametro chiamato "forza controelettromotrice" che però non corrisponde alla grandezza precedentemente identificata con il simbolo $V_{cem}$. Questo parametro rappresenta in realtà il coefficiente di proporzionalità che lega la forza controelettromotrice $V_{cem}$ alla velocità di rotazione del motore. Ad esempio, nel caso di un motore funzionante a passo intero, detto $n_p$ il numero di passi/giro e $K_E$ la costante di proporzionalità si ottiene la relazione:

$$V_{cem} = K_E \frac{f}{n_p} 60$$

La figura 19 mostra che, per il tipo di motore considerato, ad una frequenza di commutazione $f = 50$ Hz la corrente riesce a raggiungere il valore di regime $i_R$. Aumentando la frequenza di commutazione a 150 Hz, il tempo di alimentazione della fase

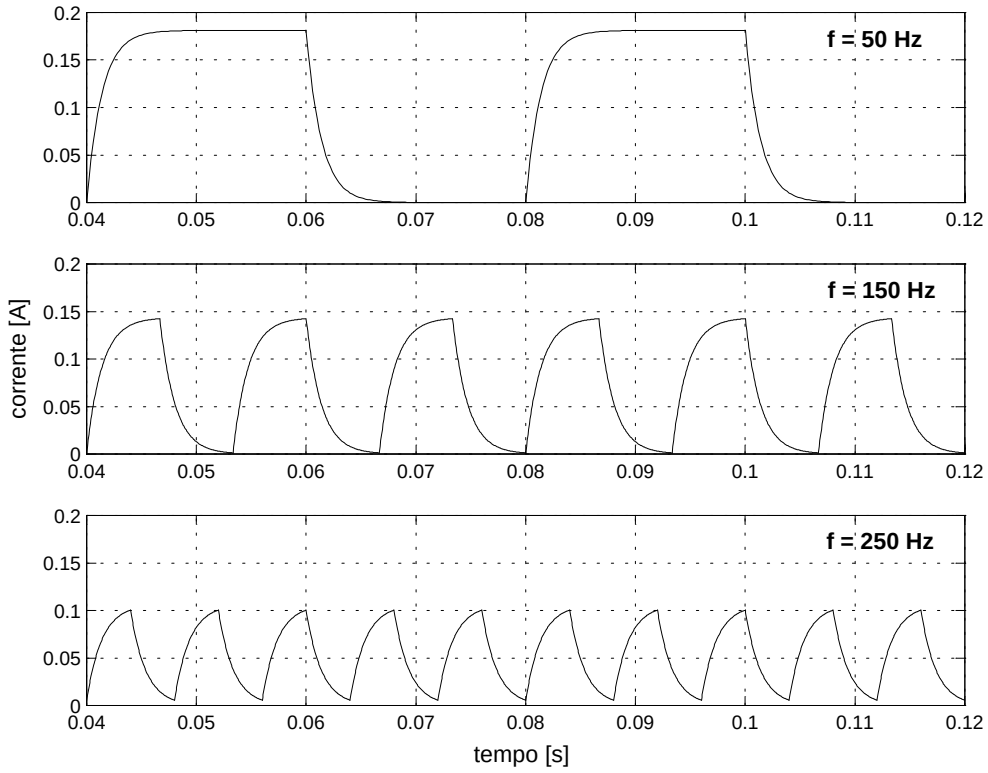



**Figura 19:** Andamento correnti di fase per diverse frequenze di commutazione

è ancora tale da consentire alla corrente di raggiungere il valore di regime che però diminuisce a causa dell'aumento della forza controelettromotrice. Alla frequenza di 250 Hz, oltre ad una ulteriore diminuzione della corrente di regime, il tempo di alimentazione della fase diventa troppo piccolo e la corrente non riesce a raggiungere il valore di regime.

## 4.3 Comportamento sul singolo passo

Si consideri un motore con una certa alimentazione delle fasi e in condizioni statiche. Esso esercita una coppia secondo la caratteristica statica $C_0$ (descritta dall'espressione 1) e, considerando per semplicità nulla la coppia resistente $C_r$, il motore assume la posizione $\alpha_0$ (figura 20).

Effettuando una commutazione delle fasi, viene imposta al sistema una variazione a gradino della posizione di equilibrio di una quantità pari all'angolo di passo $\alpha_p$. Trascurando i transitori elettrici, si può ritenere che istantaneamente la caratteristica statica $C_0$ si annulli e venga sostituita dalla $C_1$. Il motore, inizialmente nella posizione $\alpha_0$, in base alla nuova caratteristica statica accelera e acquista velocità. Al passaggio per la posizione $\alpha_1$, il rotore risulta dotato di un'energia cinetica pari al lavoro compiuto dalla coppia $C_1$ per portare il rotore dalla posizione $\alpha_0$ alla posizione $\alpha_1$ e quantificato dall'area contrassegnata dal numero 1 in figura 20. Quindi il motore supera la nuova posizione di equilibrio e, ipotizzando che non vi siano dissipazioni di energia, prosegue la sua corsa fino al raggiungimento della posizione $\alpha_2$ in cui l'area 2 eguaglia l'area 1.

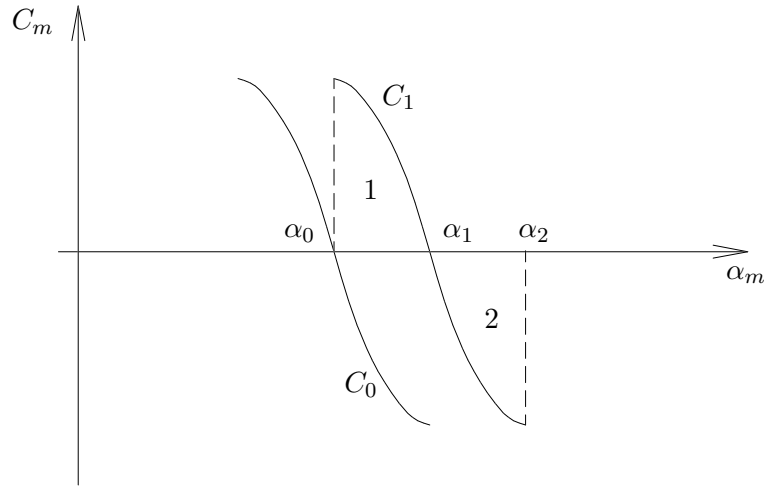



**Figura 20:** Comportamento sul singolo passo

Il rotore ritorna poi verso la posizione $\alpha_1$, la sorpassa e ritorna verso $\alpha_0$ compiendo quindi un'oscillazione.

Questa oscillazione è governata dalla legge di moto:

$$C_m = J\dot{\omega}$$

dove $J$ è l'inerzia del rotore, $\dot{\omega} = \ddot{\alpha}_m$ la sua accelerazione angolare e $C_m$ è la coppia motrice espressa, come già visto, dalla relazione

$$C_m = C_H \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_1 - \alpha_m)\right]$$

In realtà, a causa soprattutto di fenomeni elettrici, le oscillazioni risultano smorzate. Lo smorzamento viene espresso attraverso una costante viscosa $c$, per cui l'equazione del moto diventa:

$$C_m = J\ddot{\alpha}_m + c\,\dot{\alpha}_m$$

e quindi si può ritenere che la coppia motrice assuma in realtà la forma:

$$C_m^* = C_m - c\,\dot{\alpha}_m = C_H \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_1 - \alpha_m)\right] - c\,\dot{\alpha}_m$$

Questa equazione rappresenta il modello che descrive il comportamento del motore passo.

L'espressione di $C_m$ rende l'equazione non lineare in $\alpha_m$. Per poter determinare la frequenza delle oscillazioni, anche se in maniera approssimata, si può linearizzare l'equazione che esprime la coppia motrice nell'intorno della posizione di equilibrio $\alpha_1$. La coppia motrice viene quindi approssimata con una retta passante per $\alpha_1$ di pendenza pari alla tangente a $C_m$ in $\alpha_1$:

$$C_m = C_H \frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_1 - \alpha_m)$$

L'equazione di moto del sistema diviene quindi:

$$J\,\ddot{\alpha}_m + c\,\dot{\alpha}_m + C_H \frac{\pi}{2\alpha_p}\alpha_m = C_H \frac{\pi}{2\alpha_p}\alpha_1$$

mentre la pulsazione propria del sistema sarà:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_H}{J}\frac{\pi}{2\alpha_p}}$$

Da questa analisi risulta che se la frequenza di commutazione delle fasi è pari o prossima alla frequenza propria del motore, il sistema entra in risonanza e l'ampiezza delle oscillazioni diviene tale da far perdere il passo al motore. Per questo motivo nel campo di funzionamento di un motore passo vi sono zone in cui si manifestano le cosiddette *buche di coppia*, cioè zone in cui il motore, a passo intero, funziona in maniera estremamente irregolare. Il problema viene superato pilotando il motore con tecniche a passo frazionario o a micropasso, alle quali si accennerà in seguito.

## 4.4 La curva di pull-in

L'avviamento del motore passo viene in genere effettuato a partire da frequenze di pilotaggio almeno doppie di quelle proprie del sistema. Supponendo che il motore sia inizialmente fermo, se la frequenza di partenza (o di start) è eccessivamente elevata in relazione al momento d'inerzia dell'albero motore ed alla coppia resistente, la coppia motrice non è sufficiente ad accelerare tanto rapidamente il rotore da farlo sincronizzare con il campo magnetico di statore: il motore perde il passo.

Riportando sul piano caratteristico $C_m - f$, per diversi valori del momento d'inerzia $J$, la massima coppia resistente che consente al motore di avviarsi alle diverse frequenze, si ottiene la curva di **pull-in** (figura 21). Per poter avviare il motore ad una frequenza superiore a quella di pull-in occorre farlo partire con frequenza sufficientemente bassa e incrementare gradualmente la velocità, ad esempio attraverso una rampa, fino a raggiungere il valore desiderato.

Queste curve, che definiscono il campo di start del motore, ne definiscono anche, con ottima approssimazione, il campo di stop.

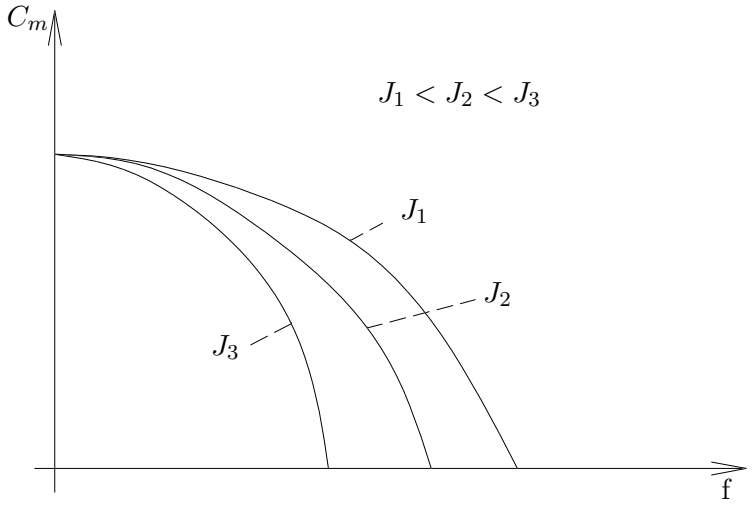



**Figura 21:** Curve di pull-in

## 4.5 Correzione del modello

In base alla curva di pull-out si può correggere il modello di funzionamento del motore passo che, nel paragrafo 4.3, è stato ricavato facendo riferimento solo alla caratteristica statica del motore, per ogni frequenza di funzionamento.

Ora si suppone che, ad ogni frequenza di comando, il motore eserciti ad ogni istante una coppia motrice corrispondente alla caratteristica statica relativa alle fasi alimentate in quell'istante, ma caratterizzata da un valore massimo individuato mediante la curva di pull-out a quella determinata frequenza di comando. La coppia massima del motore ad una certa frequenza è circa uguale a 1.1 volte la coppia di pull-out $C_{po}(f)$ a quella frequenza. Si può quindi scrivere:

$$C_m = 1.1\, C_{po}(f) \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_0 - \alpha_m)\right]$$

dove $\alpha_0$ varia nel tempo a gradini secondo una legge nota, imposta con il segnale di comando. Poiché le frequenze di comando sono solitamente molto superiori alla frequenza propria del sistema (onde evitare problemi di risonanza), la legge discontinua $\alpha_0(t)$ può essere sostituita da una legge continua che ne rappresenta l'andamento medio. Gli effetti di smorzamento interni vengono tenuti in conto attraverso un termine viscoso proporzionale alla differenza delle velocità $(\dot{\alpha}_m - \dot{\alpha}_0)$ e con costante viscosa dipendente dalla frequenza. La coppia motrice assume quindi la forma:

$$C_m = 1.1\, C_{po}(f) \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}(\alpha_0 - \alpha_m)\right] - c(f)(\dot{\alpha}_m - \dot{\alpha}_0)$$

e il modello rappresentativo del motore diviene quello di figura 22 in cui la molla è non lineare.

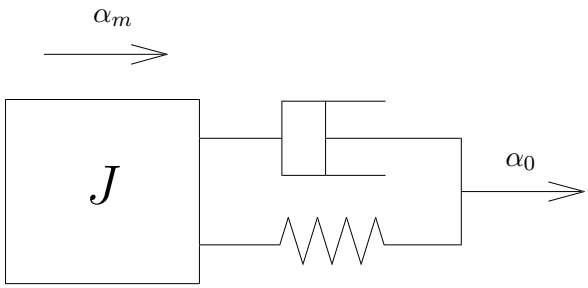



**Figura 22:** Modello del motore passo

Come già visto nel paragrafo 4.4, per poter far funzionare un motore ad una frequenza di comando superiore alla frequenza di pull-in (corrispondente ad una certa coppia resistente) occorre aumentare gradualmente la velocità del motore fino a raggiungere il valore desiderato. Dall'analisi del modello appena descritto emerge che al motore occorre dare una legge di moto $\alpha_0(t)$ tale che le oscillazioni che ne derivano mantengano la coppia esercitata dal motore all'interno del campo definito dalla curva di pull-out.

## 4.6 Curva caratteristica in funzionamento two phases on

Come già accennato in precedenza, le fasi di un motore passo possono essere alimentate contemporaneamente realizzando la cosiddetta alimentazione *two phases on*

Ad ognuna delle due fasi alimentate è associata una curva caratteristica statica, come rappresentato in figura 23. Le due curve sono sfasate di un angolo pari all'angolo di passo; applicando il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile calcolare la caratteristica statica generata da questo tipo di alimentazione. Sommando le due curve si ottiene l'andamento rappresentato in figura 23, caratterizzato da una holding torque maggiore di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al caso *one phase on*. Inoltre, sotto l'azione di questa curva caratteristica, il rotore si porta in una posizione di equilibrio intermedia a quelle relative all'alimentazione delle singole fasi.

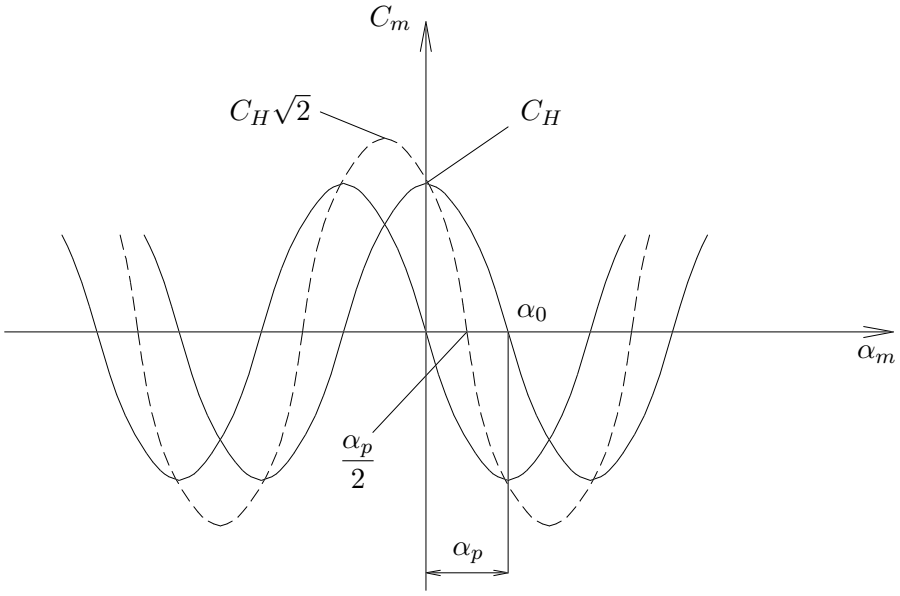



**Figura 23:** Caratteristica statica con alimentazione *two phases on*

Per rendersi conto di quanto sopra esposto, è sufficiente scrivere le espressioni delle caratteristiche statiche relative ad ognuna delle due fasi, ad esempio rispetto al sistema di riferimento di figura 23. Si ottengono le seguenti espressioni:

$$C_{m1} = C_H \ \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}\alpha_m\right]$$
$$C_{m2} = -C_H \ \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}\alpha_m\right]$$

Sommando le due equazioni si arriva ad ottenere per la coppia risultante $C_{m12}$:

$$C_{m12} = \sqrt{2}C_H \ \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha_p}\alpha_m + \frac{\pi}{4}\right]$$

da cui risulta evidente l'aumento della holding torque: l'ampiezza non è più pari a $C_H$ ma pari a $\sqrt{2}C_H$. Inoltre calcolando l'intersezione della curva con l'asse delle ascisse si ottiene $\alpha_m = \alpha_p/2$, cioè la posizione di equilibrio del rotore è intermedia tra quelle relative alle singole fasi.

Alimentando, ad ogni commutazione, due fasi contemporaneamente, il motore continua ad avanzare con incrementi di un angolo di passo; continua cioè a funzionare a *passo intero* (*full step*).

Accanto al vantaggio di avere una coppia maggiore, occorre però tener presente che l'alimentazione *two phases on*, proprio a causa del fatto che vengono alimentate due fasi contemporaneamente, comporta una dissipazione energetica maggiore per effetto Joule.

Questa tecnica di pilotaggio viene utilizzata anche per ottenere il funzionamento a *mezzo passo* (*half step*).

Ad ogni commutazione il rotore compie mezzo angolo di passo e quindi il numero di passi del motore raddoppia: un motore da 200 passi/giro assume, in condizioni di funzionamento *half step*, una risoluzione di 400 passi/giro.

Come si può notare dalla tabella precedente, vi sono passi in cui è alimentata una sola fase, e passi in cui ne sono alimentate due. Ciò provoca una irregolarità nella coppia poiché si passa da istanti in cui la holding torque ha un valore $C_H$, a istanti in cui assume un valore pari a $\sqrt{2}C_H$. Per ovviare a questo inconveniente si può ricorrere ad azionamenti che consentano di modulare la corrente inviata al motore. In particolare, negli istanti di alimentazione contemporanea delle fasi, la corrente dovrebbe essere pari a $1/\sqrt{2}$ volte la corrente di alimentazione di una singola fase.

# 5 Il pilotaggio dei motori passo

Nei paragrafi precedenti si è accennato al fatto che i motori passo possono essere realizzati in configurazione unipolare o bipolare; questo si riflette anche sugli azionamenti che quindi si suddividono in **unipolari** e **bipolari**.

## 5.1 Driver unipolari

Il driver unipolare è dedicato al pilotaggio di motori passo unipolari, cioè motori dotati di due avvolgimenti per ogni fase.

In funzione della logica di comando, imposta al driver dall'esterno, la corrente viene fatta circolare nelle diverse fasi secondo lo schema di figura 24, in cui sono rappresentati anche i transistors di pilotaggio.

Ognuna delle quattro fasi deve quindi essere collegata, da un lato ai transistors e dall'altro all'alimentazione; come già accennato nel paragrafo 3.3.1, vi sono casi in cui questi ultimi collegamenti sono già realizzati all'interno del motore che quindi non si presenta più con 8 fili esterni ma con 5 o 6.

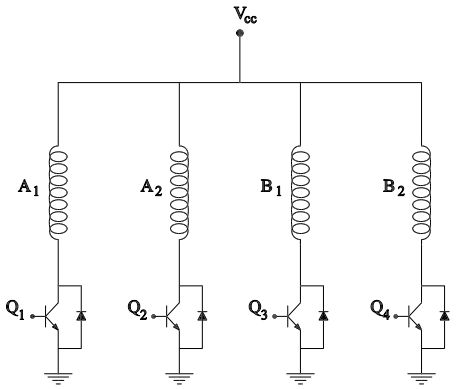



**Figura 24:** Schema di un driver unipolare

La sequenza delle fasi viene realizzata attraverso una opportuna logica di pilotaggio dei transistors adibiti alla chiusura del circuito di alimentazione di ognuna delle quattro fasi. In dipendenza della sequenza con cui vengono comandati i transistors, si hanno i diversi tipi di funzionamento: one *phase on*, *two phase on*, *half step*.

Ad esempio per realizzare un funzionamento *full step*, *two phase on*, la sequenza sarebbe:

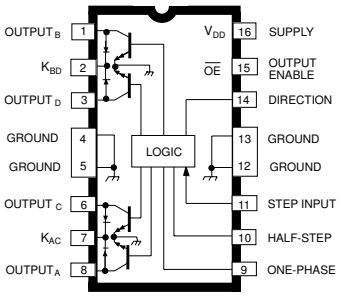
| **Passo** | $\mathbf{Q}_1$ | $\mathbf{Q}_3$ | $\mathbf{Q}_3$ | $\mathbf{Q}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ON | OFF | ON | OFF |
| 2 | OFF | ON | ON | OFF |
| 3 | OFF | ON | OFF | ON |
| 4 | ON | OFF | OFF | ON |

Un esempio di driver unipolare è il circuito integrato 5804 della Allegro Microsystems (figura 25(a)) per il quale è rappresentato in figura 25(b) un possibile schema di utilizzo.

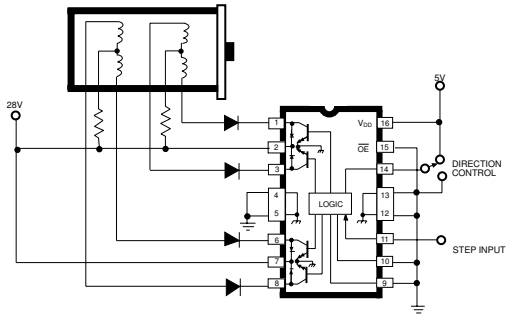
Il pilotaggio dei transistors è realizzato dalla parte di logica interna, mentre alcuni dei comandi che giungono dall'esterno sono:

- segnale ad onda quadra (pin 11, STEP INPUT), la cui frequenza è pari alla frequenza di commutazione delle fasi desiderata;
- segnali ai pins 9, 10 e 14 che consentono di selezionare rispettivamente: il funzionamento ONE o TWO PHASE ON, HALF STEP, e il verso di rotazione del motore (DIRECTION).

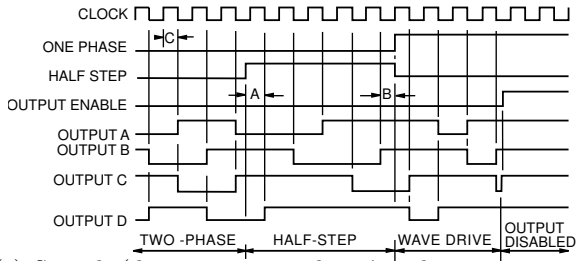
In figura 25(c) è riportato un esempio che mostra l'andamento dei segnali nelle fasi del motore (OUTPUT A, B, C, D), in dipendenza dei segnali di ingresso (CLOCK [STEP-INPUT], ONE PHASE, HALF STEP).




(a) Assegnazione pin




(b) Schema d'impiego




(c) Segnali (il termine *wave drive* è utilizzato come sinonimo di alimentazione *one phase on*)

**Figura 25:** Driver unipolare 5804

## 5.2 Driver bipolari

Quando si devono pilotare motori bipolari è necessario ricorrere a driver bipolari; caratteristica peculiare di questo tipo di azionamento è la possibilità di invertire il verso di percorrenza della corrente di fase.

Per realizzare questa funzione viene utilizzato uno schema circuitale a doppio ponte (*full bridge*), che consente il funzionamento del motore nei quattro quadranti.

In figura 26 è rappresentato lo schema di collegamento di una delle due fasi del motore con il relativo doppio ponte.

Pilotando alternativamente le coppie di transistors $Q_1$, $Q_4$ e $Q_2$, $Q_3$, la fase viene alimentata con polarità diverse[4].

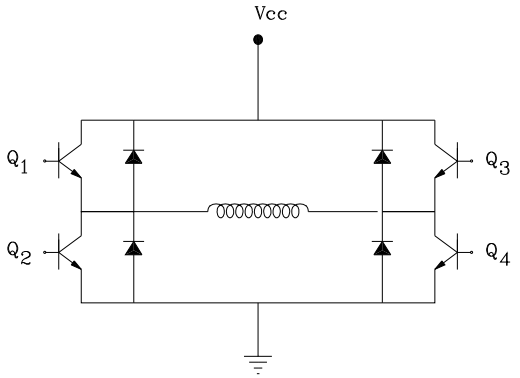



**Figura 26:** Schema di un driver bipolare relativo ad una singola fase

Un esempio di driver bipolare è il circuito integrato L6219 della ST Microelectronics, il cui schema a blocchi è rappresentato in figura 27; POWER BRIDGE 1 e 2 sono i circuiti a doppio ponte.

Anche in questo caso i transistors non vengono pilotati direttamente ma alcuni dei segnali di input forniti (ad esempio per la fase A) sono:

[4]La logica di comando, oltre a fornire la sequenza di apertura e chiusura dei transistors, fa in modo che le coppie $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$, $Q_4$ non risultino mai chiuse contemporaneamente, onde evitare la condizione di corto circuito.

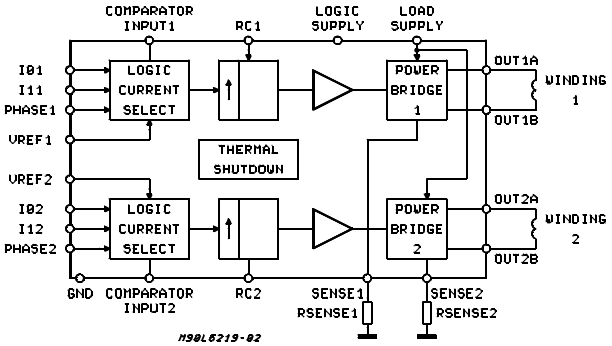



**Figura 27:** Schema a blocchi driver bipolare L6219

- PHASE1: il segnale alto o basso al pin corrispondente determina il verso di percorrenza della corrente;

- I01, I11: a seconda dello stato alto o basso di questa coppia di pin viene determinato il livello di corrente circolante nella fase (che può essere posto anche a zero). Questi due ingressi consentono quindi di selezionare il funzionamento *one phase on*, *two phases on*, *half step* o a *micropasso* (*microstepping*).

## 5.3 Il controllo della corrente

Come già descritto nel paragrafo 4.2, all'aumentare della frequenza di comando, la coppia erogabile dal motore, in condizioni di regime, diminuisce. A causa dell'induttanza degli avvolgimenti, infatti, la corrente di alimentazione, che tende a raggiungere il valore di regime $i_R = (V - V_{cem})/R$, subisce, all'atto della commutazione, un transitorio con costante di tempo $\tau = L/R$.

All'aumentare della frequenza di comando si ha la compresenza di due fenomeni: da un lato il tempo durante il quale la fase è alimentata diventa paragonabile alla costante di tempo elettrica $\tau$, dall'altro si ha un continuo aumento della forza controelettromotrice $V_{cem}$ e quindi una continua diminuzione del valore della corrente di regime $i_R$. L'insieme di questi due aspetti provoca la diminuzione della coppia erogabile.

Per ovviare al problema legato a $\tau$, si può agire inserendo una **resistenza in serie** ad ognuna delle fasi del motore: in questo modo la resistenza totale ($R_{tot}$) del circuito relativo ad ogni singola fase viene aumentata con una conseguente diminuzione della costante di tempo (figura 28).

Per garantire lo stesso valore della corrente a regime il circuito deve essere alimentato con una tensione $V'$ maggiore di $V$ e questo consente di ridurre anche l'effetto della forza controelettromotrice sulla variazione di $i_R$.

Un pilotaggio della corrente di questo tipo prende il nome di **L/nR direct voltage drive**, intendendo con "nR" che la resistenza totale è n volte più alta della resistenza di fase R. Nel caso particolare di figura 28 la resistenza totale è pari a 2 volte la resistenza di fase e quindi, per garantire lo stesso valore di corrente di regime anche la tensione applicata deve essere doppia.

Questa tecnica presenta però lo svantaggio di dissipare maggior potenza per effetto Joule a causa dell'aumento di resistenza; un modo per risolvere questo problema è ricorrere ad un azionamento a **due livelli di tensione**.

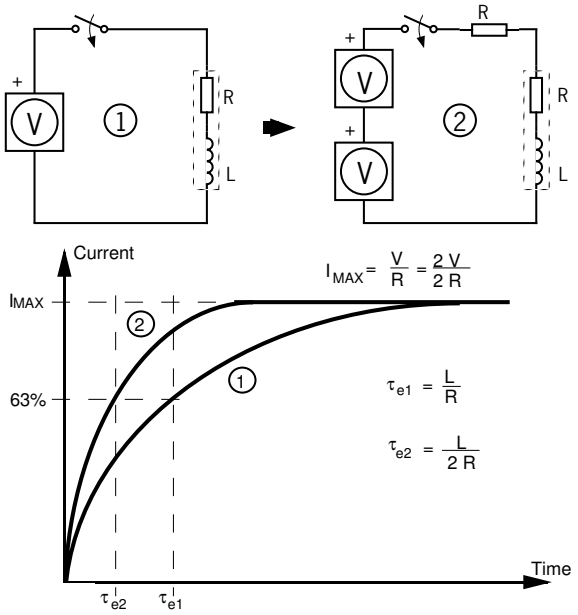



**Figura 28:** Andamento della corrente di fase

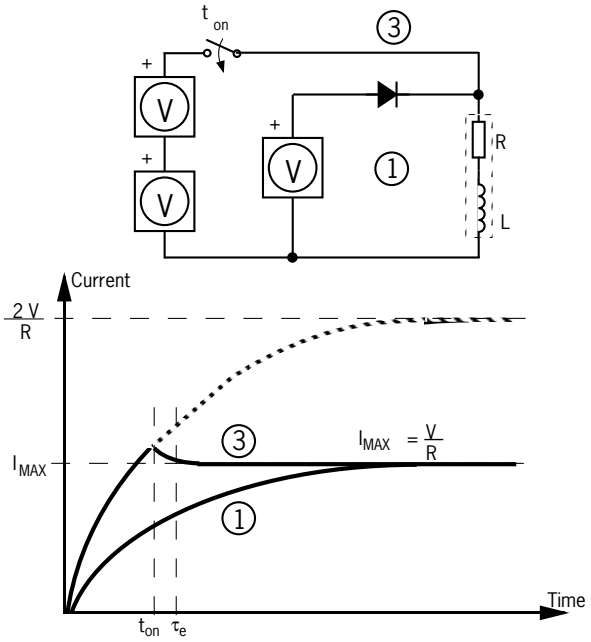



**Figura 29:** Schema di azionamento a due livelli di tensione

Durante il transitorio, la fase, senza resistenze aggiuntive, viene alimentata con una tensione molto più alta della tensione necessaria al raggiungimento del valore $i_R$. In questo modo, pur rimanendo invariato il valore di $\tau$, la corrente cresce molto più rapidamente durante il transitorio; al raggiungimento del valore desiderato $i_R$ (condizione determinata attraverso un sensore di corrente), l'azionamento passa ad alimentare la fase con la tensione $V$ (figura 29). In questo caso, visto che a regime la tensione applicata alla fase è $V$, l'effetto della forza controelettromotrice non viene ridotto, come invece nel caso precedente.

L'approccio più comunemente utilizzato e più efficiente è quello basato sull'impiego di un **chopper a controllo di corrente**. In questo caso la fase viene alimentata con un valore di tensione molto più alto di $V$ e al raggiungimento del valore desiderato di $i_R$ viene effettuato il "chopping" della tensione di alimentazione fissando una determinata frequenza di switching e un determinato *duty cycle* (figura 30), secondo quanto prevede la tecnica di *modulazione della larghezza d'impulso* PWM (Pulse Width Modulation).

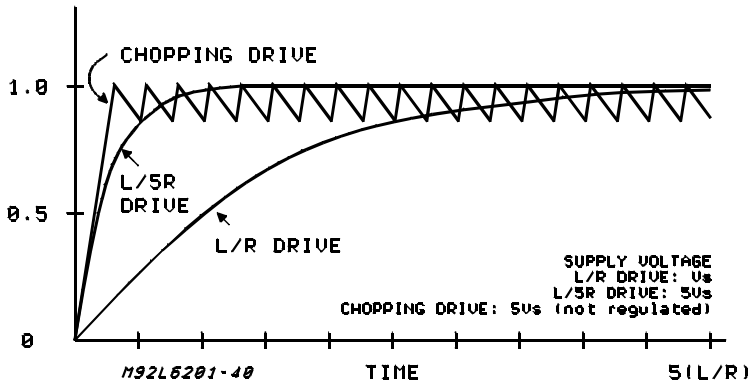



**Figura 30:** Andamento della corrente di fase

La corrente circolante nella fase viene misurata attraverso una resistenza di "sense" e il valore viene confrontato con quello desiderato; la differenza tra i due viene comparata con un segnale a frequenza fissa proveniente da un oscillatore e viene così stabilito il valore da attribuire al *duty cycle* in modo da mantenere la corrente desiderata (figura 31).

Inoltre in questo tipo di controllo, poiché la tensione di alimentazione è molto più alta di $V$, si ha una notevole riduzione dell'effetto della forza controelettromotrice sia durante il transitorio che a regime.

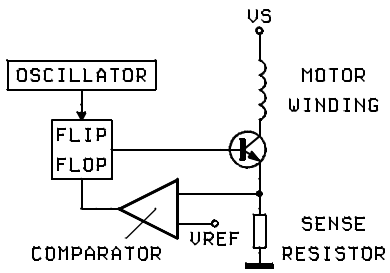


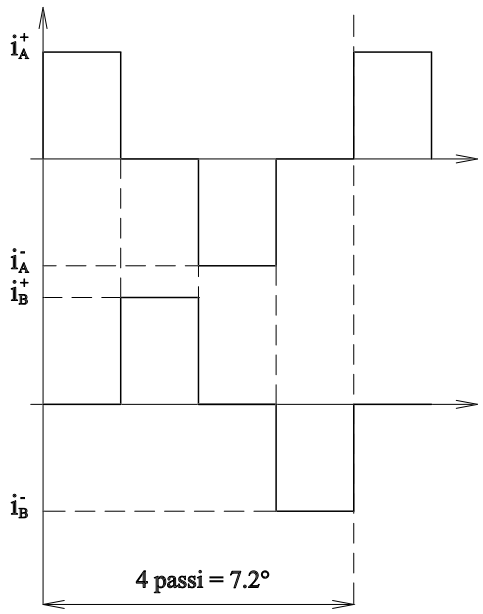

**Figura 31:** Schema dello stadio di comparazione

Un esempio di questo tipo di controllo è quello che avviene nell'integrato L6219. La figura 27 mostra la presenza dei due pin SENSE1 e SENSE2 a cui vengono collegate le rispettive resistenze di sense. Le tensioni ai capi delle resistenze costituiscono l'ingresso dei relativi comparatori (COMPARATOR INPUT1 e 2) e vengono poi confrontate con i segnali di riferimento VREF1 e VREF2. La differenza tra i segnali misurati e di riferimento viene comparata con un segnale a frequenza fissa proveniente da un oscillatore interno al circuito integrato; in questo modo viene stabilito il valore del duty cycle necessario.

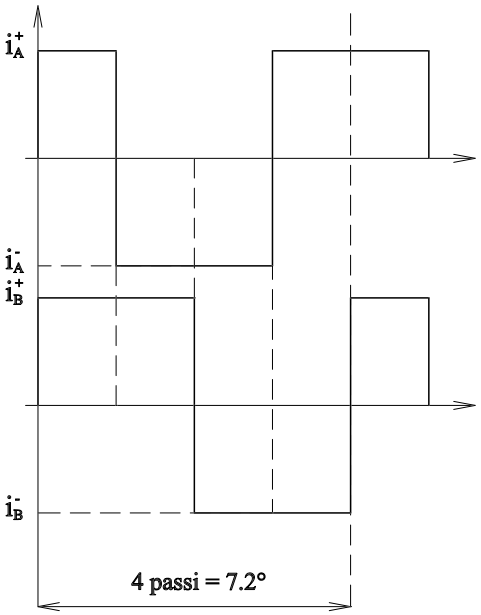
### 5.3.1 Funzionamento a micropasso

La possibilità di modulare la corrente viene utilizzata per estendere il frazionamento del passo fino a giungere al funzionamento a **micropasso** (**microstepping**).

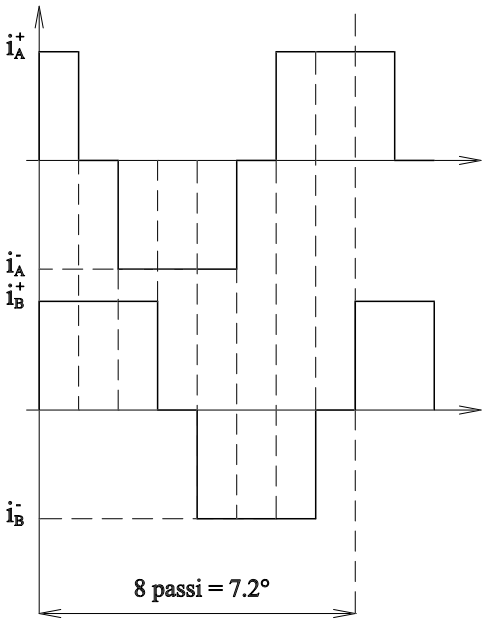
Nel funzionamento a micropasso le correnti assumono un andamento, in funzione della posizione angolare, sempre più simile a quello sinusoidale, man mano che si aumenta il frazionamento del passo. La figura 32 mostra la sequenza di alimentazione



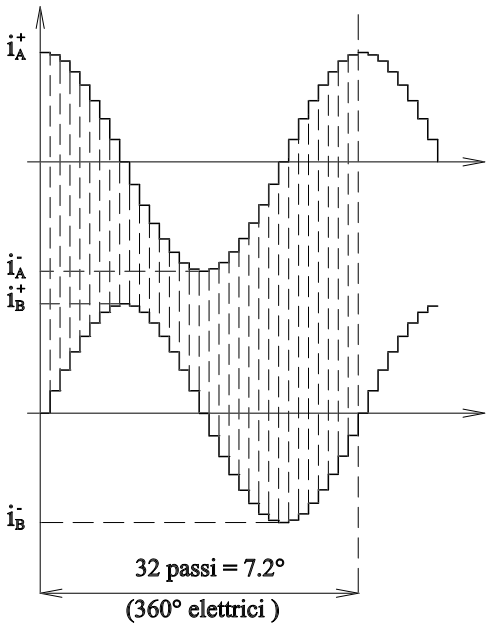

(a) Alimentazione *one phase on*, funzionamento *full step*




(b) Alimentazione *two phases on*, funzionamento *full step*




(c) Funzionamento *half step*




(d) Funzionamento *microstepping* (1/8 di passo)

**Figura 32:** Sequenza di alimentazione fasi

delle fasi in diverse condizioni di funzionamento per un motore bipolare con risoluzione 200 passi/giro.

Il frazionamento del passo porta una serie di notevoli vantaggi tra cui:

- miglioramento della risoluzione angolare del motore;
- restringimento del campo di frequenze di comando in cui il motore entra in risonanza;

- riduzione dell'irregolarità di moto con conseguente riduzione anche della rumorosità.

# Appendice A: principio di generazione della coppia

Il principio di funzionamento dei motori passo si basa sui fenomeni di attrazione e repulsione fra poli magnetici e sul principio di minimizzazione della riluttanza di un circuito magnetico.

**Interazione tra poli magnetici.** Alla base degli studi compiuti sul magnetismo ci sono una serie di considerazioni di carattere sperimentale tra cui l'osservazione che, se si prendono due calamite e si avvicinano l'una all'altra, per esempio tenendone una fissa e lasciando l'altra libera di ruotare, fra le due si esercitano delle forze che tendono a far ruotare quella mobile fino al raggiungimento di una posizione di equilibrio (figura A-1). In altre parole, il sistema si porta in una configurazione tale che i vettori induzione

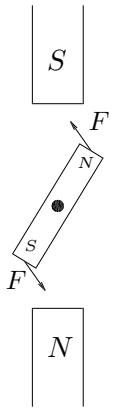



**Figura A-1:** Interazione tra poli magnetici

magnetica $B$, relativi ai campi magnetici generati dai due elementi, risultino allineati.

**Riluttanza variabile** Una barretta di materiale ferromagnetico, immersa in un campo magnetico esterno e libera di ruotare attorno al baricentro, ruota fino al raggiungimento di una posizione di equilibrio, corrispondente all'allineamento con le linee di flusso del campo magnetico stesso.

Questo fenomeno può essere descritto anche da un punto di vista analitico, in base a considerazioni di carattere energetico.

Consideriamo il circuito magnetico di figura A-2. Il circuito è alimentato da una corrente $i$ e sull'elemento ferromagnetico rotante agisce una coppia resistente $C_r$ che si oppone alla rotazione dell'elemento stesso verso la posizione di equilibrio. Dal punto di vista del flusso di potenza, il sistema può essere schematicamente rappresentato come in figura A-3
dove $W_{el}$, $E_{mag}$ e $W_{mec}$ sono rispettivamente la potenza elettrica entrante, l'energia accumulata nel campo magnetico e la potenza meccanica uscente.

Le espressioni assunte da queste grandezze sono le seguenti:

$$\begin{aligned} W_{el} &= V_{cem}\, i \\ E_{mag} &= \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(\vartheta)} \\ W_{mec} &= C_r \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned} \tag{A-1}$$

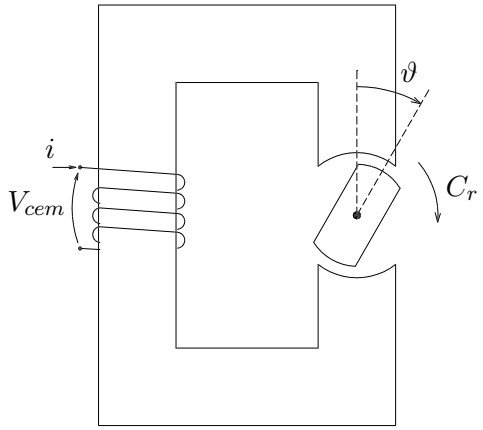



**Figura A-2:** Schema di un sistema elettromeccanico

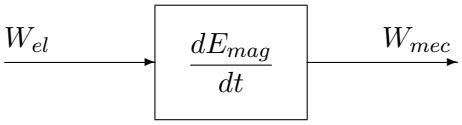



**Figura A-3:** Flusso di potenza attraverso un sistema elettromeccanico

in cui $\lambda$ è il flusso concatenato e $L(\vartheta)$ è il coefficiente di autoinduzione, dipendente dalla posizione $\vartheta$ assunta dall'elemento rotante.

In base al teorema delle potenze si può scrivere il seguente bilancio energetico

$$W_{el} = W_{mec} + \frac{dE_{mag}}{dt}$$

e sostituendo l'espressioni della potenza meccanica (Eq. A-1) si ottiene:

$$V_{cem}\, i = C_r \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{dE_{mag}}{dt}$$

Il flusso concatenato $\lambda$ e la corrente $i$ sono legati dalla relazione $\lambda = L(\vartheta)\, i$ [5] e, per la legge di *Faraday-Neumann*, tra la forza controelettromotrice $V_{cem}$ e $\lambda$ esiste la relazione $V_{cem} = d\lambda/dt$. In base a queste considerazioni, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$dE_{mag} = i\, d\lambda - C_r d\vartheta \tag{A-2}$$

L'energia immagazzinata nel campo magnetico è una grandezza funzione del flusso concatenato $\lambda$ e della posizione $\vartheta$ assunta dall'elemento rotante ed è quindi una funzione di due variabili: $E_{mag} = E_{mag}(\lambda, \vartheta)$.

[5] Questa relazione presuppone che il materiale in questione sia caratterizzato da una permeabilità magnetica $\mu$ costante, condizione che risulta con buona approssimazione verificata.

Il differenziale di una funzione di due variabili assume la forma:

$$dE_{mag}(\lambda,\vartheta) = \frac{\partial E_{mag}(\lambda,\vartheta)}{\partial \lambda}\, d\lambda + \frac{\partial E_{mag}(\lambda,\vartheta)}{\partial \vartheta}\, d\vartheta \tag{A-3}$$

Dal confronto tra l'Eq. A-2 e l'Eq. A-3, quindi, si ricava immediatamente che l'espressione della coppia $C_r$ è pari a:

$$C_r = -\frac{\partial E_{mag}(\lambda,\vartheta)}{\partial \vartheta} \tag{A-4}$$

Derivando e sostituendo successivamente a $\lambda$ la sua espressione in funzione di $i$, si ottiene:

$$C_r = -\frac{1}{2}\, i^2\, \frac{dL(\vartheta)}{d\vartheta} \tag{A-5}$$

Per l'esempio di figura A-2 è possibile dimostrare che la funzione che lega il coefficiente di autoinduzione $L$ alla posizione angolare $\vartheta$ è del tipo

$$L(\vartheta) = \frac{1}{2}\,[L_d + L_q + (L_d - L_q) cos 2\vartheta]$$

che graficamente assume l'andamento rappresentato in figura A-4. La coppia $C_r$, e

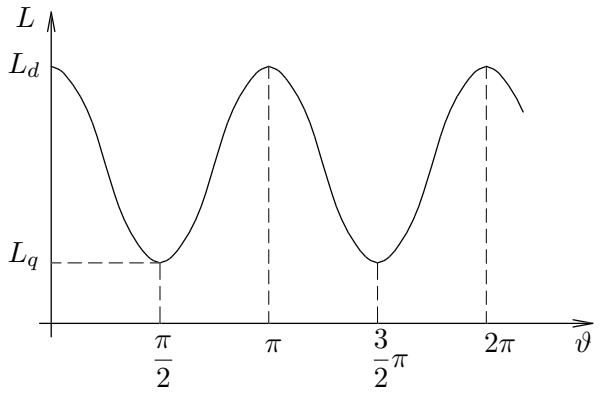



**Figura A-4:** Coefficiente di autoinduzione vs. $\vartheta$

quindi la coppia $C_m$ "motrice" che il sistema elettromeccanico sviluppa, assume la forma:

$$C_m = C_r = \frac{1}{2}\, i^2\ (L_d - L_q)\, sin 2\vartheta$$

Dall'analisi dell'andamento della coppia $C_m$, rappresentato in figura A-5, si nota che le uniche posizioni di equilibrio stabile sono quelle caratterizzate da un angolo di rotazione $\vartheta = n\pi$ con $n$ intero positivo. L'azione della coppia tende quindi ad allineare l'elemento rotante con le espansioni polari del circuito magnetico e a porre il sistema in una condizione caratterizzata dalla massimo valore di induttanza $L$ (come si deduce dal grafico relativo all'andamento di $L$ in funzione di $\vartheta$ osservando i valori assunti da $L$ per $\vartheta = n\pi$).

Nello studio dei circuiti magnetici è molto utilizzato il concetto di *riluttanza magnetica* $\mathscr{R}$. Questa grandezza è legata al flusso $\phi$ del campo magnetico generato dall'avvolgimento e alla corrente $i$ dalla relazione $\mathscr{R} = Ni/\phi$ (legge di Hopkinson), dove $N$ è il numero di spire dell'avvolgimento e il flusso $\phi$ è legato al flusso concatenato $\lambda$ dalla relazione $\lambda = \phi\, N$. Ricordando poi che $\lambda = L(\vartheta)\, i$ si deduce che la riluttanza $\mathscr{R}$ e l'induttanza $L$ sono legate dalla relazione:

$$\mathscr{R} = \frac{N^2}{L}$$

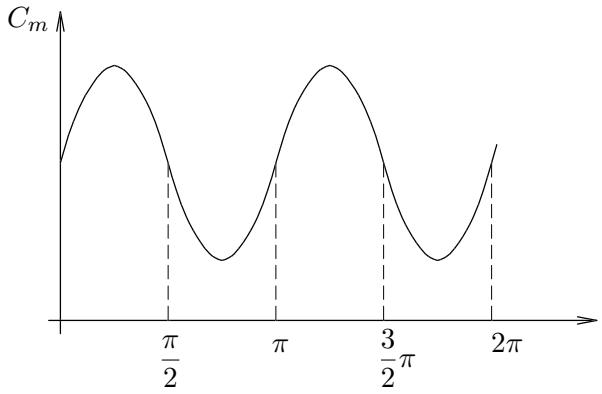



**Figura A-5:** Coppia vs. $\vartheta$

da cui si nota che, quando $L$ assume valore massimo, $\mathscr{R}$ assume valore minimo. Ecco quindi che il sistema lavora sempre in maniera da *minimizzare* la riluttanza del circuito magnetico.